

$\{X(t), t \geq 0\}$ Στοχαστική Διαδικασία.

Μαρκοβιανή

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$$

$$\begin{aligned} \text{P}(\text{X}(t) = i \mid \text{X}(t_1) = j_1, \text{X}(t_2) = j_2, \dots, \text{X}(t_n) = j_n) = \\ = \text{P}(\text{X}(t) = i \mid \text{X}(t_n) = j_n) \end{aligned}$$

Πιθανότητες μεταβάσεων : $P_{ij}(u, t) = \text{P}(\text{X}(t) = j \mid \text{X}(u) = i) \quad u < t$

$$\text{P}(\text{X}(t+u) = j \mid \text{X}(u) = i)$$

Αν ανεξάρτητο του u τότε έχουμε στατικές πιθανότητες μεταβάσεων και τότε ισχύει με

$$P_{ij}(t) = \text{P}(\text{X}(t+u) = j \mid \text{X}(u) = i)$$

Διαδικασία Γεννήσεων - Θανάτων

$$\{X(t), t \geq 0\} \quad P_{ij}(t) = \text{P}(\text{X}(t+u) = j \mid \text{X}(u) = i)$$

i) $\mu, \lambda \quad \Delta \mu dt + o(dt)$

$$P_{n, n+1}(dt) = \lambda dt + o(dt)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{o(dt)}{dt} = 0$$

ii) $P_{n, n-1}(dt) = \mu dt + o(dt)$

iii) $o(dt)$ Λογίζομαι ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n των χρονικών σημείων t η πιθανότητα να συμβούν

Περιοδοτέρα του ~~ενός~~ ενός γεγονότα στο διάστημα $(t, t+dt)$ είναι $o(dt)$

$$P_u(t) = P(X(t)=u \mid X(0)=i)$$

Καταστάσεις τη στιγμή

$u-1$

$u+1$

j

u

Γεγονότα στο $(t, t+dt)$

γέννηση

θάνατο

αλλαγή γεγονότα

καμία αλλαγή

Πιθανότητες

$$P_{u-1}(t) (\lambda_{u-1} dt + o(dt))$$

$$P_{u+1}(t) (\mu_{u+1} dt + o(dt))$$

$$P_j(t) o(dt)$$

$$P_u(t) (1 - \lambda_u dt - \mu_u dt + o(dt))$$

$$P_u(t+dt) = P_{u-1}(t) (\lambda_{u-1} dt + o(dt)) + P_{u+1}(t) (\mu_{u+1} dt + o(dt)) + \sum_j P_j(t) o(dt) + P_u(t) (1 - \lambda_u dt - \mu_u dt + o(dt))$$

$$\frac{P_u(t+dt) - P_u(t)}{dt} = \lambda_{u-1} P_{u-1}(t) + \mu_{u+1} P_{u+1}(t) - (\lambda_u + \mu_u) P_u(t) + \frac{o(dt)}{dt}$$

• $dt \rightarrow 0^+$

$$\frac{dP_u(t)}{dt} + (\lambda_u + \mu_u) P_u(t) = \lambda_{u+1} P_{u+1}(t) + \mu_{u+1} P_{u+1}(t) \quad u=1, 2, \dots$$

$$u=0$$

Καταστάσεις
τη στιγμή t

1

$j \neq (0, 1)$

0

Γεγονότα στο
($t, t+dt$)

Σεισμός

αποθήκευση γεγονότων

απώλεια γεγονότων

Πιθανότητες

$$P_1(t) (\mu_1 dt + o(dt))$$

$$P_j(t) o(dt)$$

$$P_0(t) (1 - \lambda_0 dt + o(dt))$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t)$$

$$\frac{dP_u(t)}{dt} + (\lambda_u + \mu_u) P_u(t) = \lambda_{u-1} P_{u-1}(t) + \mu_{u+1} P_{u+1}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_u(t) = P_u$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_u(t)}{dt} = 0$$

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_u + \mu_u) P_u = \lambda_{u-1} P_{u-1} + \mu_{u+1} P_{u+1} \quad u > 0$$

εξισώσεις
σταθερής
ισορροπίας

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$\vdots$

$$P_u = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{u-1}}{\mu_1 \dots \mu_u} P_0$$

$$\text{Πρέπει } \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} P_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right)^{-1}$$

Καθαρή Διαδικασία Γεννήσεων

$$\lambda_n = \lambda \quad \mu_n = 0 \quad P_N(0) = 1 \quad P_i(0) = 0 \quad i \neq N$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \quad n = N+1, N+2, \dots$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} + \lambda P_N(t) = 0$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\lambda P_N(t)$$

$$P_N(t) = K e^{-\lambda t} \quad P_N(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dP_{N+1}(t)}{dt} + \lambda P_{N+1}(t) = \lambda P_N(t)$$

$$\frac{dP_{N+1}(t)}{dt} + \lambda P_{N+1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$P_{N+1}(t) = e^{-\lambda t} \left(\int + e^{-\lambda t} e^{\lambda t} + C \right) \quad P_{N+1}(t) = A + e^{-\lambda t}$$

$$P_{N+1}(0) = 0$$

~~~~~

$$\frac{dP_{N+2}(t)}{dt} + \lambda P_{N+2}(t) = \lambda A + e^{-\lambda t}$$

$$P_{N+2}(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}$$

$$P_{N+u}(t) = \frac{(\lambda t)^u e^{-\lambda t}}{u!}, \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

Παρατηρώ ότι δεν εξαρτάται από που ξεκίνησε αραί εδώ την χρονική στιγμή ο βρώκορκε στο  $N$ . Εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $+$  που διένυσε.

$$P(X(t_0+t) = j \mid X(t_0) = i) = P(X(t_0+t) - X(t_0) = j-i)$$

$$P(N(t) = j-i) = \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!}$$

$$\{N(t), t \geq 0\}$$

Ορίζω  $t_n$ : η χρονική στιγμή της n-οστής γεννήσεως

$$T_n = t_{n+1} - t_n$$

(ψάχνω να βρω κατανομή του  $T_n$ )

$$P(T_n > z) = P(X(t_n+z) - X(t_n) = 0) = P(N(z) = 0) = e^{-\lambda z}$$

$$P(T_n < z) = 1 - e^{-\lambda z}$$

$$\text{Άρα } T_n \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \text{ή} \quad T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$\text{Για } t_n < t_a < t_{n+1}$$

$$z_n = t_{n+1} - t_n$$

$$P(z_n > z) = P(X(t_n+z) - X(t_n) = 0) = P(N(z) = 0) = e^{-\lambda z}$$

$$P(z_n < z) = 1 - e^{-\lambda z}$$

Ιδιότητα της Αμνησίας  
ή  
Ιδιότητα Markov

### Πολλαπλασιαστική

$$X \sim \mu \quad \text{αφ' } f \quad f(x)$$

$$u_X(z) = E(e^{zx}) = \int e^{zx} f(x) dx$$

$$\left. \frac{d^r u_x(z)}{dz^r} \right|_{z=0} = E(x^r)$$

### Πιθανογεννήτρια

$$g_x(z) = E(z^x) \quad |z| \leq 1$$

$$\left. \frac{d^r g_r(z)}{dz^r} \right|_{z=1} = E(x(x-1)\dots(x-r+1))$$

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω  $\{x_i\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισοδύναμων τ.μ.  
 με ~~πυκνότητα~~ πιθανογεννήτρια  $P_X(z)$  και  $N$  μια μη αρνητική  
 αέριστη μεταβλητή ανεξάρτητη των  $x_i$  με πιθανογεννήτρια  $P_N(z)$   
 τότε η πιθανογεννήτρια  ~~$P_{X+N}(z)$~~  του αθροίσματος  
 $Y_N = x_1 + \dots + x_N$  δίνεται ως  $P_{Y_N}(z) = P_N(P_X(z))$

$$P(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) z^n$$

$$\text{log} \text{uei} \quad P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n P(t, z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = 0$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

πρόσ/γω με  
 $2^0$

$2^1$

$2^2$

2<sup>η</sup>

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)$$

και αφορίζω κατά ~~από~~ μέλη και έχω

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \lambda P(t, z) = \lambda z P(t, z)$$

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \lambda(1-z)P(t, z) = 0$$

$$\frac{dP}{P} = -\lambda(1-z)dt$$

$$P(t, z) = C e^{-\lambda(1-z)t} \quad (1)$$

Έχω τις αρχικές συνθήκες  $P_0(0) = 1$ ,  $P_i(0) = 0 \quad i \neq 0$

οπότε  $P(0, z) = 1 \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow P(t, z) = e^{-\lambda(1-z)t}$$

Μπορώ να την γράψω και αλλιώς χρησιμοποιώντας Taylor. και e

$$P(t, z) = e^{-\lambda(1-z)t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n z^n}{n!}$$

### Μετασχηματισμός Laplace

Έστω ~~μια~~ μια συνάρτηση  $f(x)$  η οποία παίρνει τη τιμωτική τιμή για  $x \geq 0$ . Ο Laplace μετασχηματισμός της

$$g(z) = \mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx \quad \text{Re}(z) > 0$$

### Ιδιότητες

$$1) f(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

$$2) \frac{df(x)}{dx} \xrightarrow{\mathcal{L}} -f(0) + zg(z)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \frac{df(x)}{dx} dx \stackrel{\text{Anöduft}}{=} e^{-zx} f(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x) d e^{-zx} =$$

$$= -f(0) + 2 \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx = -f(0) + 2g(z)$$

$$3) \int_0^x f(u) du \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z} g(z)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \int_0^x f(u) du dx \stackrel{\text{Anöduft}}{=} \int_0^{\infty} f(u) \int_u^{\infty} e^{-zx} dx du =$$

$$= \int_0^{\infty} f(u) \left[ -\frac{1}{z} e^{-zx} \right]_u^{\infty} du = \int_0^{\infty} f(u) \frac{1}{z} e^{-zu} du = \frac{1}{z} g(z)$$

4) Αν  $g(z)$  αναδοτική για  $\operatorname{Re}(z) > 0$  και υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow 0} 2g(z) \text{ τότε } \lim_{z \rightarrow 0} 2 \cdot g(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

### Παράδειγμα

$$\text{Έστω } T, \mu \quad x \text{ με } G.N.N \quad f(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(z) \\ y \quad h(y) \xrightarrow{\mathcal{L}} c(z)$$

$x, y$  ανεξάρτητες.

$$\text{και } T = x + y$$

$$u_{x+y}(t) = \int_0^t f(x) h(t-x) dx$$

$$\text{u.b. } u_{x+y}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

λίαν

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zt} \int_0^t f(x) h(t-x) dx dt &= \int_0^{\infty} f(x) \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t-x) dt dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} \int_x^{\infty} e^{-z(t-x)} h(t-x) dt dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} \int_0^{\infty} e^{-zy} h(y) dy dx = \\ &= g(z) c(z) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί Γνωστών Συναρτήσεων

| <u>Αποδοτική f<sub>n</sub></u> | <u>z-μετασχηματισμός</u> | <u>Συνάρτηση f(t)</u>    | <u>Laplace μετασφ.</u>  |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1                              | $\frac{1}{1-z}$          | 1                        | 1/z                     |
| Ax <sup>n</sup>                | $\frac{A}{1-xz}$         | t <sup>n</sup> /(n-1)!   | 1/z <sup>n</sup>        |
| ux <sup>n</sup>                | $\frac{xz}{(1-xz)^2}$    | Ae <sup>-at</sup>        | $\frac{A}{z+a}$         |
| u                              | $\frac{z}{(1-z)^2}$      | te <sup>-at</sup>        | $\frac{1}{(z+a)^2}$     |
| $\frac{1}{n!}$                 | e <sup>z</sup>           | $\frac{t^n e^{-at}}{n!}$ | $\frac{1}{(z+a)^{n+1}}$ |

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω {x<sub>n</sub>} μια αποδοτική ανεξάρτητων και κίνησης τ.μ με μετασφ/μο Laplace F<sub>x</sub>(z) και N μια μη αρνητική αέραια τ.μ ανεξάρτητη των τ.μ {x<sub>n</sub>} με πιθανογεννήτρια P(z). Τότε ο μετασφ/μος Laplace του ~~Y~~ Y<sub>N</sub> = x<sub>1</sub> + ... + x<sub>N</sub> δίνεται ως

$$F_{YN}(z) = P_N(F_X(z))$$

Παραδείγματα

$$\{x_n\} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$N \sim \text{Geo}(r) \quad Y_N = x_1 + \dots + x_N$$

$$\text{Από θεωρημα} \quad F_{YN}(z) = P_N(F_X(z)) = \frac{(1-r) F_X(z)}{1 - r F_X(z)} =$$

$$= \frac{(1-r) \frac{\lambda}{\lambda+2}}{1 - r \frac{\lambda}{\lambda+2}} = \frac{(1-r)\lambda}{(1-r)\lambda+2}$$

$$\text{Άρα } Y_N \sim \text{Exp}((1-r)\lambda)$$